Instituto de Matemática
Álgebra
2018-I

Prueba 3

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1+\frac{Puntos}{10}$. **Duración** = 60 minutos

---

1) [**20 ptos.**] Sea $z = \dfrac{(1+\sqrt{3}\,i)^5}{4\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

   a) (**10 ptos.**) Demuestre que $z = -8i$.

   b) (**10 ptos.**) Encuentre todas las raíces del polinomio $(x^3 - \overline{z})$ en $\mathbb{C}$. **Exprese cada una de las raíces en la forma binomial**.

2) [**20 ptos.**] Sea $p(x) = 2x^3 - ax^2 + bx - 4$, con $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) (**10 ptos.**) Determine los valores de $a, b \in \mathbb{Z}$ para que 2 sea una raíz de multiplicidad 2 de $p(x)$.

b) (**10 ptos.**) Descomponga en fracciones parciales:

$$\frac{-4x + 11}{(2x - 1)(x^2 - 4x + 4)}$$

3) [**20 ptos.**] Sea C la cónica con ecuación $3x^2 - y^2 + 18x + 4y + 11 = 0$.

a) (**10 ptos.**) Determine qué tipo de cónica es C. Luego, encuentre el(los) foco(s) de C.

b) (**10 ptos.**) Encuentre la ecuación de la elipse que tiene distancia focal 2 (distancia de foco a foco) y cuyos vértices (extremos del eje mayor) corresponden a ser los focos de la cónica C.

PAUTA

1) a) Tenemos que

$$1+\sqrt{3}i = |1+\sqrt{3}i|\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{(2 pts.)}$$

Luego

$$z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^5}{4\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2^5\,\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{4\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 8\,\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = 8\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -8i$$

(2+2+2+2 pts.)

b) Las raíces del polinomio $(x^3-\overline{z})$ son las raíces cúbicas de $\overline{z}$. Como $\overline{z} = 8i = 8\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (1 pts.), sus raíces cúbicas vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right) = 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}+i \quad \text{(3 pts.)}\\
w_1 &= 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right) = 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}+i \quad \text{(3 pts.)}\\
w_2 &= 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right) = 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2i \quad \text{(3 pts.)}
\end{aligned}$$

2) a) Que $p(x)$ tenga a 2 como raíz doble, es equivalente a tener que $p(x)$ sea divisible por x^2-4x+4. Al realizar la división $p(x)$ por x^2-4x+4 nos queda como resto el polinomio $(b-4a+24)x+4a-36$ (4 pts.), el cual es igual a 0 si y sólo si $a=9$ y $b=12$ (3+3 pts.).

b) La descomposición en fracciones parciales nos queda

$$\frac{-4x+11}{(x-2)^2(2x-1)} = \frac{A}{(x-2)^2}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(2x-1)} \quad \text{(4 pts.)}$$

esto es, si y sólo si $-4x+11 = A(2x-1)+B(x-2)(2x-1)+C(x-2)^2$. Para encontrar los valores de A, B y C podemos evaluar sucesivamente por $x=2$, $x=1/2$ y $x=0$ (por ejemplo), obteniendo que

$$\begin{aligned}
3 &= 3A \Rightarrow A = 1 \quad \text{(2 pts.)}\\
9 &= \frac{9}{4}C \Rightarrow C = 4 \quad \text{(2 pts.)}\\
11 &= 1(-1)+B(-2)(-1)+4(4) \Rightarrow B = -2 \quad \text{(2 pts.)}
\end{aligned}$$

3) [**20 ptos.**] Sea C la cónica con ecuación $-3x^2 + y^2 - 18x - 4y = 11$.

a) Completando cuadrados nos queda que C tiene ecuación normal

$$\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{12} = 1$$

luego C es una hipérbola con eje de simetría horizontal (5 pts.). Además, la distancia semifocal de la hipérbola, c_h, satisface $c_h^2 = 4 + 12 = 16$, es decir $c_h = 4$. Luego, los focos tienen coordenadas $(-7, 2)$ y $(1, 2)$ (5 pts.).

b) La medida del semieje mayor de la elipse, a, es 4 (2 pts.). Como la distancia focal, $2c$, es 2, tenemos que $c = 1$ (2 pts.). Así, $b^2 = 16 - 1$, es decir $b = \sqrt{15}$ (2 pts.). La ecuación de elipse es entonces

$$\frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{15} = 1 \quad \text{(4 pts.)}$$